7．量的データの解析方法１
（ t 検定）

内　容

1．t 検定の前提条件

2．スチューデントの t 統計量

3．２群の t 検定
- 対応がない場合
- 対応がある場合

4．信頼区間

3

１．*t* 検定の前提条件

- 正規性
- 等分散性

4

正規性検定

- グラフ（正規Q-Qプロット）で確認
- Shapiro-Wilk検定
- １標本Kolmogorov-Smirnov検定

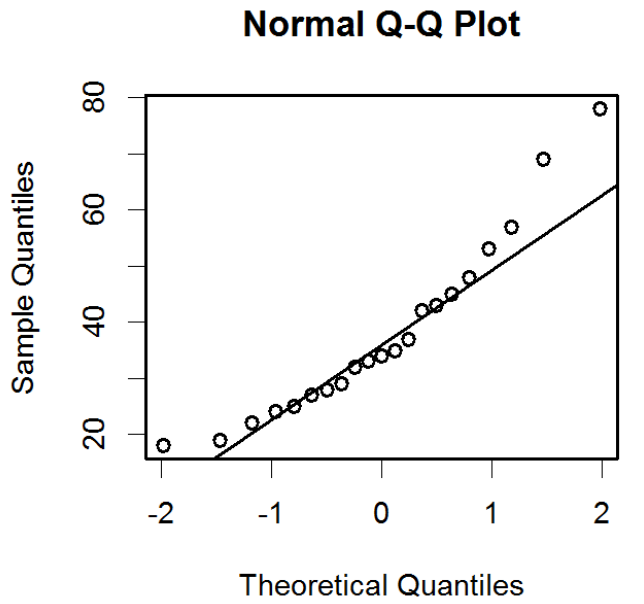
5

正規Q-Qプロット

18	19	22	24	25	27	28
29	32	33	34	35	37	42
43	45	48	53	57	69	78

```
> data <-
c(18,19,22,24,25,27,28,29,32,33,34,35,37,42,
43,45,48,53,57,69,78)
> qqnorm(data)
> qqline(data)
```

6



7

2．スチューデントの t 統計量

$$z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_{\overline{X}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$の標準偏差（=標準誤差） $\sigma_{\overline{X}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

σを u や s で代用して、

$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{u/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)\text{分布}$$

スチューデント化

8

t 分布

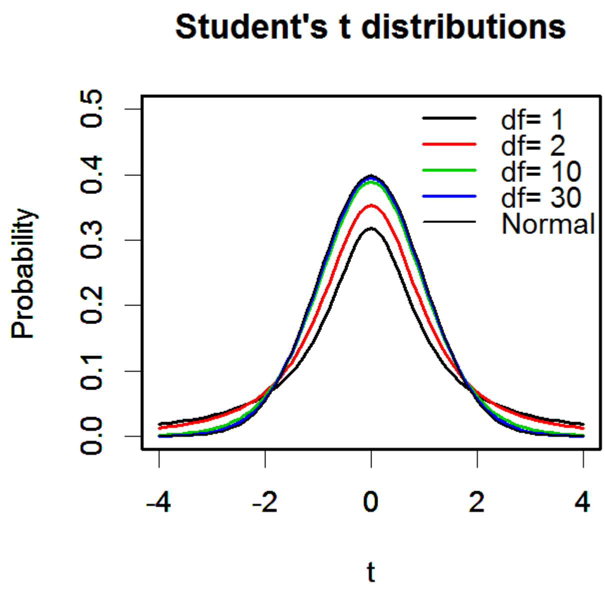
$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\bigg/\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\bigg/\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}$$

分子 ～ N（0, 1）分布

分母 ～ χ^2（n-1）分布

t 統計量 ～ t（n-1）分布

9



10

１群の t 検定

ある製品は350mmの長さであると決められている。標本を20個無作為抽出したところ、平均349mm、標準偏差2mmであった。母集団は規格を満たしていると言えるか。

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{u / \sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n-1}} \sim t(n-1)\text{分布}$$

$$t = \frac{349 - 350}{2 / \sqrt{20-1}} = -2.179$$

$t(19)$ のp=.05は　2.093　で、求めた t の絶対値の方が大きいので、5%水準で規格を満たしていると言えない。

11

62,64,64,64,66,65,64,66,64,66の平均は65と言えるか

```
x <- c(62,64,64,64,66,65,64,66,64,66)
t.test(x,mu=65)
```

一標本t検定（母平均の検定）

データ：　x
t値 = -1.2457,　自由度 = 9,　P値 = 0.2443
対立仮説：母平均は，65ではない
95 パーセント信頼区間：　63.592 65.408
標本推定値：
平均値x 常に　x
　64.5

12

３．２群の *t* 検定

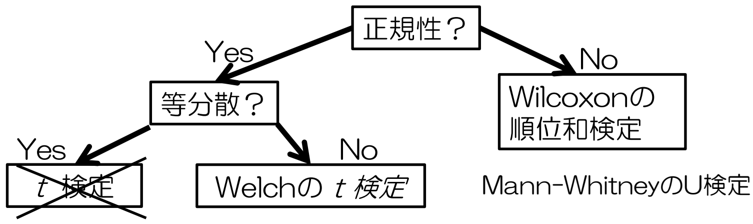
2つの母集団が正規分布にしたがうとして、平均が等しいかどうかの検定

- 対応がない場合
- 対応がある場合

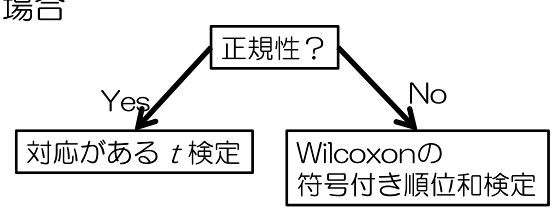
13

t 検定

対応のない場合

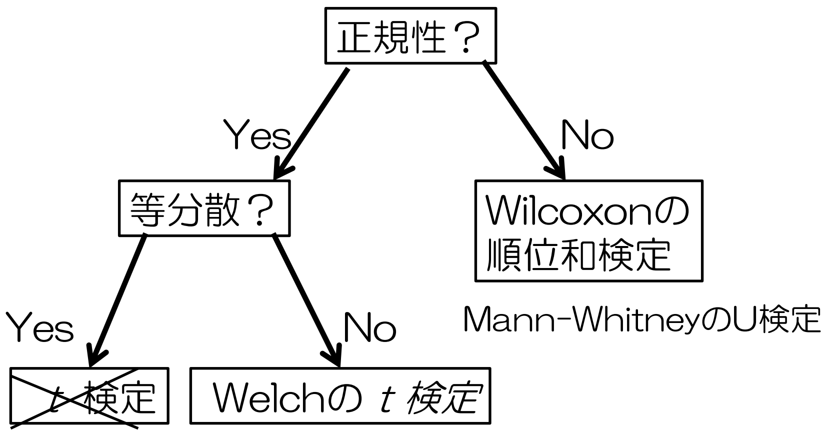


対応のある場合



14

対応がない場合



15

等分散の検定

F 検定

母分散：σ_1^2、 σ_2^2

データ数：n_1、n_2

不偏分散：u_1^2、 u_2^2（ただし、 $u_1^2 > u_2^2$）

H_0 ： $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1 ： $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$$F = \frac{u_1^2}{u_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}\text{分布}$$

ではあるが、最初から等分散を仮定しないほうがよい

16

（Studentの） t 検定

母集団：N（μ_1, σ）、 N（μ_2, σ）

データ数：n_1、n_2

標本平均：x_1、 x_2

不偏分散：u_1^2、 u_2^2

H_0 ： $\mu_1 = \mu_2$

H_1 ： $\mu_1 = \mu_2$

17

標本平均の差の標本分布

標本平均の差の平均 $\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \mu_1 - \mu_2$

標本平均の差の分散 $\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sigma^2_{\overline{X_1}} + \sigma^2_{\overline{X_2}}$

$$= \frac{\sigma}{n_1} + \frac{\sigma}{n_2} = \sigma\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$$\overline{X_1} - \overline{X_2} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\right)$$

18

標準化する

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

H_0：$\mu_1 = \mu_2$ なので

$$\frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

19

σの推定値として重みづけ平均を考える

$$\sigma_{pooled} = \sqrt{\frac{(n_1-1)u_1^2+(n_2-1)u_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}$$

前頁の式に代入

$$\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)u_1^2+(n_2-1)u_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

t 統計量といい、自由度 n_1+n_2-2 の t 分布に従う

20

$n_1 = n_2$ のときは

$$t = \frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\frac{u_1^2+u_2^2}{n}}} \sim t_{n-1}\text{分布}$$

21

A社	6	4	4	4	6	5	4	6	4	6
B社	5	4	3	3	5	3	5	5	4	3

A社とB社で差があるか？

```
a <- c(6,4,4,4,6,5,4,6,4,6)
b <- c(5,4,3,3,5,3,5,5,4,3)
t.test(a,b,var.equal=T)
```

22

```
a <- c(6,4,4,4,6,5,4,6,4,6)
b <- c(5,4,3,3,5,3,5,5,4,3)
t.test(a,b,var.equal=T)
```

```
二標本t検定（分散が等しいと仮定できるとき）

データ:  a と b
t値 = 2.0769,  自由度 = 18,  P値 = 0.0524
対立仮説: 母平均の差は, 0ではない
95 パーセント信頼区間:  -0.01039955  1.81039955
標本推定値:
平均値x 平均値y
    4.9     4.0
```

このデータをWilcoxsonの順位和検定をすると

wilcox.test(a,b)

ウィルコクソンの順位和検定（連続性の補正）

データ: a と b
W = 73, P値 = 0.07744
対立仮説: location shiftは，0ではない

警告メッセージ:
In wilcox.test.default(a, b) :
  タイがあるため、正確な p 値を計算することができません

Welchの t 検定

$$t = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{u_1^2}{n_1} + \dfrac{u_2^2}{n_2}}} \sim t_d\text{分布}$$

$$d = \frac{\left(\dfrac{u_1^2}{n_1} + \dfrac{u_2^2}{n_2}\right)}{\left(\dfrac{u_1^2}{n_1}\right)^2 \dfrac{1}{n_1 - 1} + \left(\dfrac{u_2^2}{n_2}\right)^2 \dfrac{1}{n_2 - 1}} \text{の整数部分}$$

25

A社	6	4	4	4	6	5	4	6	4	6
B社	5	4	3	3	5	3	5	5	4	3

A社とB社で差があるか？

t.test(a,b)

26

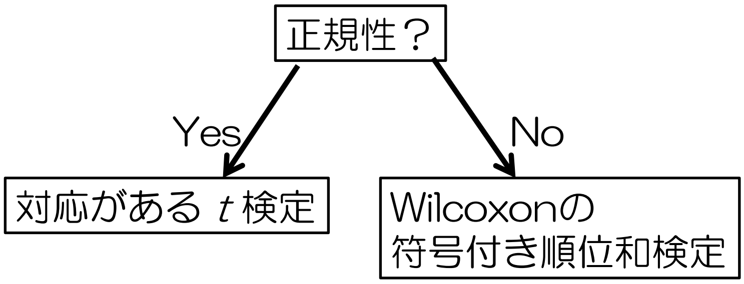
t. test(a, b)

二標本t検定（Welchの方法）

データ: a と b
t値 = 2.0769, 自由度 = 17.949, P値 = 0.05244
対立仮説: 母平均の差は, 0ではない
95 パーセント信頼区間: -0.01058466 1.81058466
標本推定値:
平均値x 平均値y
4.9 4.0

27

対応がある場合



28

対応がある t 検定

対応する２群のデータの差 $D = X_1 - X_2$

データ数：n

平均：$\overline{\mu}_D$ $(= \overline{X}_1 - \overline{X}_2)$

不偏分散： u_D^2

H_0： $\mu_D = 0$

H_1： $\mu_D \neq 0$

$$t = \frac{\overline{\mu_D} - \mu_D}{\frac{u_D}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{\mu_D}}{\frac{u_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}\text{分布}$$

29

~~A社~~	6	4	4	4	6	5	4	6	4	6
~~B社~~	5	4	3	3	5	3	5	5	4	3

上と下で対応があるとして差を検定

```
t.test(a,b,paired=T)
```

30

```
t.test(a,b,paired=T)
```

対応のある場合のt検定

データ: a と b
t値 = 2.5861, 自由度 = 9, P値 = 0.0294
対立仮説: 母平均の差は, 0ではない
95 パーセント信頼区間: 0.1127462 1.6872538
標本推定値:
差の平均値
0.9

31

Wilcoxsonの符号付き順位和検定をすると

wilcox.test(a,b,paired=T)

```
ウィルコクソンの符号付順位和検定(連続性の補正)

データ:  a と b
V = 32.5, P値 = 0.04033
対立仮説: location shiftは, 0ではない

 警告メッセージ:
1: In wilcox.test.default(a, b, paired = TRUE) :
  タイがあるため、正確な p 値を計算することができません
2: In wilcox.test.default(a, b, paired = TRUE) :
  ゼロ値のため、正確な p 値を計算することができません
```

32

source("all.R", encoding="euc-jp")
wilcox.paired.test(a, b)

```
ウィルコクソンの符号付順位和検定 (連続性の補正)

データ:  x と y
V = 32.5, P値 = 0.04033
対立仮説: location shiftは, 0ではない

 警告メッセージ:
1: In wilcox.test.default(x, y, paired = TRUE, ...) :
  cannot compute exact p-value with ties
2: In wilcox.test.default(x, y, paired = TRUE, ...) :
  cannot compute exact p-value with zeroes
```

33

論文での記載例

対応のある場合のt検定

データ: a と b
t値 = 2.5861, 自由度 = 9, P値 = 0.0294
対立仮説: 母平均の差は, 0ではない
95 パーセント信頼区間: 0.1127462 1.6872538
標本推定値:
差の平均値
0.9

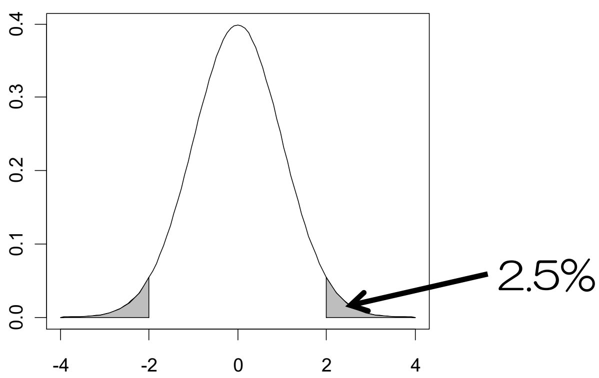
対応のある t 検定を実施した。その結果、t (9)=2.586, p<.05であり、有意な差が認められた。

34

4. 信頼区間

９５％信頼区間

$$\overline{X}-1.96\times SE\leq\mu\leq\overline{X}+1.96\times SE$$



35

母集団の平均値の区間推定

$$\overline{X} - t \times \frac{u}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t \times \frac{u}{\sqrt{n}}$$

36

誤差が正規分布をなすと思われる製品から標本を10個無作為抽出したところ、長さの平均は350mm、標準偏差は1mmであった。この製品の母平均の95%信頼区間を求めよ。

$$\overline{X} - t \times \frac{s}{\sqrt{n-1}} \le \mu \le \overline{X} + t \times \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

$t(9)$ の p=.05 は 2.262

$$350 - 2.26 \times \frac{1}{\sqrt{10-1}} \le \mu \le 350 + 2.26 \times \frac{1}{\sqrt{10-1}}$$

$$347.4 \le \mu \le 352.6$$

37

母集団の平均値の区間推定

$$\overline{X} - t \times \frac{u}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t \times \frac{u}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間

$$\overline{X} - qt(0.975, n-1) \times SE \leq \mu \leq \overline{X} + qt(0.975, n-1) \times SE$$

38

A社	6	4	4	4	6	5	4	6	4	6
B社	5	4	3	3	5	3	5	5	4	3

A社の平均の９５%信頼区間

$$\overline{X} - qt(0.975, n-1) \times SE \leq \mu \leq \overline{X} + qt(0.975, n-1) \times SE$$

```
mean(a)-qt(0.975,length(a)-1)*sd(a)/sqrt(length(a))
```

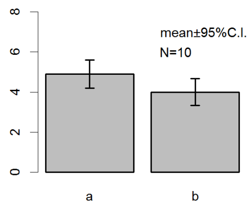
```
[1] 4.188628
```

```
mean(a)+qt(0.975,length(a)-1)*sd(a)/sqrt(length(a))
```

```
[1] 5.611372
```

39

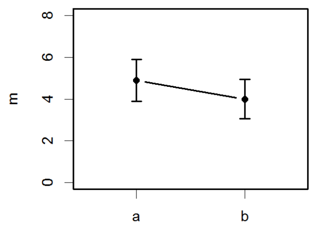
棒グラフ




```
c <- rbind(a,b)
m <- apply(c,1,mean)
s <- apply(c,1,sd)
se.a <- qt(0.975,length(a)-1)*sd(a)/sqrt(length(a))
se.b <- qt(0.975,length(b)-1)*sd(b)/sqrt(length(b))
se <- c(se.a, se.b)
names(se) <- c( "a","b")
par(cex=1.8,lwd=3)
x <- barplot(m,ylim=c(0,8),names.arg=names(c))
arrows(x, m-se, x, m+se, angle=90,length=0.1)
arrows(x, m+se, x, m-se, angle=90,length=0.1)
text(2,7,"mean±95%C.I.")
text(1.68,6,"N=10")
```

40

折れ線グラフ




```
x <- plot(1:2,m,
xlim=c(0.5,2.5),ylim=c(0,8),type="b",xlab="",xaxt="n")
arrows(1:2, m-s, 1:2, m+s, angle=90,length=0.1)
arrows(1:2, m+s, 1:2, m-s, angle=90,length=0.1)
axis(1,1:2,c("a","b"))
```

41

出力された統計値を再利用

```
a <- c(6,4,4,4,6,5,4,6,4,6)
b <- c(5,4,3,3,5,3,5,5,4,3)
t.test(a,b,var.equal=T)
```

```
二標本t検定（分散が等しいと仮定できるとき）

データ:  a と b
t値 = 2.0769, 自由度 = 18, P値 = 0.0524
対立仮説: 母平均の差は, 0ではない
95 パーセント信頼区間:  -0.01039955  1.81039955
標本推定値:
平均値x 平均値y
    4.9      4.0
```

42

```
> summary(t.test(a,b))
```

	Length	Class	Mode
statistic	1	-none-	numeric
parameter	1	-none-	numeric
p.value	1	-none-	numeric
conf.int	2	-none-	numeric
estimate	2	-none-	numeric
null.value	1	-none-	numeric
alternative	1	-none-	character
method	1	-none-	character
data.name	1	-none-	character

43

```
> t.test(a,b,var.equal=TRUE)$statistic
       t
2.076923

> t.test(a,b,var.equal=TRUE)$conf.int
[1] -0.01039955  1.81039955
attr(,"conf.level")
[1] 0.95

> t.test(a,b,var.equal=TRUE)$conf.int[1]
[1] -0.01039955
>
```